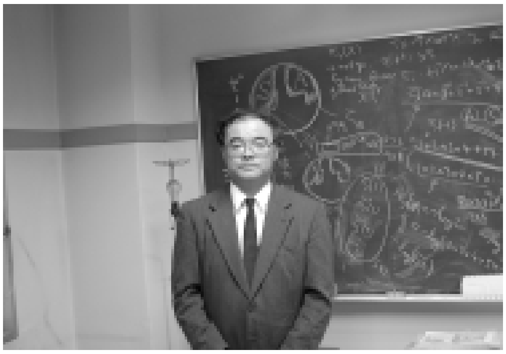
In Laboratory Now

研究室訪問 1

ゼータの世界へようこそ

黒川研究室〜数学専攻



黒川 信重　教授

数学の難題を解決する道具として、ゼータと呼ばれるものが注目されている。1994年に解決されたフェルマーの最終定理も、ゼータがきっかけとなって解決につながった。さらに現在数学界での最難題とされるリーマン予想は、それ自体がゼータと密接に関わっている。ここ東工大にも、自らの研究室をゼータ研究所と称して、様々なゼータに関する研究に日夜努めている数学者がいる。その人こそが黒川教授である。黒川教授の行っているゼータの研究とはいったいどのようなものであろうか。

ゼータの発見、そしてその利用

数学を専門にしている人以外にとって、ゼータとはあまり聞き慣れない言葉であろう。簡単に言えば、ゼータとは素数のまとまりのことである。素数そのものは遥か昔から知られているものだが、ゼータという概念はそれよりずっと後にできたものである。素数の発見は紀元前500年頃、ピタゴラスまでさかのぼる。紀元前300年頃に書かれたユークリッドの『原論』には、素数が無限個あることの証明が残されており、古くから素数が研究されていたことがわかる。一方、ゼータという概念はそれから約2000年後の1737年になって、素数の逆数和が無限大になることをオイラーが示したのが始まりである。

ゼータを用いた関数をゼータ関数と呼び、黒川教授はその中でも

$$\zeta(s) = \prod_{p:\text{素数}} (1-p^{-s})^{-1} \qquad (s>1)$$
$$= (1-2^{-s})^{-1}\cdot(1-3^{-s})^{-1}\cdot(1-5^{-s})^{-1}\cdots$$

という形で書かれる、ゼータ関数の元祖に特に力を入れて研究している。

ゼータは難問の証明、暗号の研究など多くの場面で利用されている。難問の証明の例として、

「3以上の素数 p に対して

$$a^p + b^p = c^p$$

を満たす自然数 a, b, c は存在しない」

というフェルマーの最終定理がある。この定理は証明までに357年という長い歳月を要したが、1980年代にある決定的な手がかりが発見され、事態は大きく進展した。その証明方法を簡単に説明すると、まず $a^p + b^p = c^p$ を満たす a, b, c, p から作られる

$$\text{E:}\quad y^2 = x(x-a^p)(x+b^p)$$

という方程式を用意する。Eを

$$y^2 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

の形で表すと、α, β, γ はそれぞれ

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = a^p \\ \gamma = -b^p \end{cases}$$

となる。Eに対し、三次方程式の解の判別式

$$D \equiv (\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$$

を適用すると、

$$\begin{cases} \alpha - \beta = -a^p \\ \beta - \gamma = a^p + b^p = c^p \\ \gamma - \alpha = -b^p \end{cases}$$

より

$$D=(abc)^{2p}$$

というように、 a,b,c,p との関係が簡単に分かる。ここでEにより作られるゼータを調べると、矛盾を生じることが示せる。そして、背理法からフェルマーの最終定理が証明できるのだ。本来、Eはフェルマーの最終定理とは無関係に存在していて偶然発見された方程式であったが、このゼータを研究することで、フェルマーの最終定理が証明されるに至った。

また、「 x 以下の素数の個数は x が非常に大きくなるとき $\frac{x}{\log x}$ くらいになる」という、1896年に示された素数定理の証明にもゼータが用いられた。そこで使われた性質は、 $\zeta(s)$ の s を複素数にまで拡張したとき、 s の実部が1なら $\zeta(s)\neq 0$ であるというものである。そして、素数定理を究極まで追求するものが、次章で扱うリーマン予想である。

ちなみに、 x を1以上の実数としたとき、 x 以下の素数の個数 $\pi(x)$ について以下の式が成り立つこととリーマン予想とは同値であることが知られている：

$$\pi(x)=\mathrm{Li}(x)+O(x^{\frac{1}{2}}\log x)$$

$$(\mathrm{Li}(x)=\int_0^x\frac{dt}{\log t}=\frac{x}{\log x}+\frac{x}{(\log x)^2}+\cdots)$$

現段階では $\pi(x)$ は近似式でしか与えられていないが、 $\pi(x)$ の精密な形を出すことができるのではないかと予想して、研究が進められている段階である。

現在未解決の難問にも、ゼータを用いて証明できるものがあると考えられている。しかし、ゼータは現在知られているものだけでも無数にあるので、その問題に適したゼータを見つけ出すことはとても困難であり時間もかかる。だが、見つけ出すことができれば、フェルマーの最終定理の時と同じようにして、世紀の大難問でさえも一気に解決に結びつく可能性もあるのだ。

ζ　リーマン予想は行列式で証明できるか

リーマン予想とは、

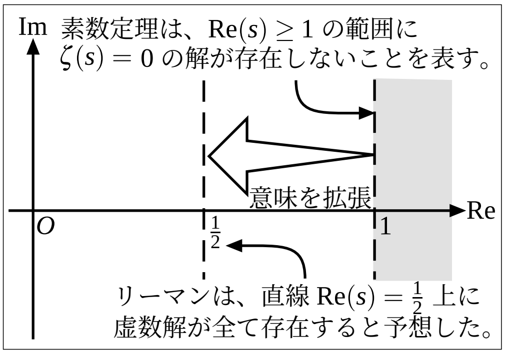
「 $\zeta(s)$ での s を複素数にまで拡張すると、 $\zeta(s)=0$ を満たす虚数解 s の実部は常に $\frac{1}{2}$ である」

とリーマンが1859年に予想したものである。これは2000年5月にフランスで開かれた世界数学者会議で創設が発表された「ミレニアム賞」のテーマの一つになっている。「ミレニアム賞」とは、1900年の世界数学者会議でドイツの大数学者ヒルベルトが、当時の「世紀の難問」として23問を提示したのにならったものである。この「ミレニアム賞」の対象になっている問題は、「世紀の難問」にも含まれていたリーマン予想を含む計7題である。つまり、リーマン予想は世紀をまたいでなお未解決の難題なのである。

黒川教授はこのリーマン予想の解決を目指し、その方法として $\zeta(s)$ の行列式表示を試みている。 $\zeta(s)$ の行列式表示とは、 R をある適切な無限次の行列、 E を単位行列として、

$$\zeta(s)=\det(R-(s-\tfrac{1}{2})E)=\prod_{\lambda}\left(\lambda-(s-\frac{1}{2})\right)$$

と表すことである。ここで、リーマン予想が成り立っているということは、虚数解 s に対して $s-\frac{1}{2}$ が純虚数ということである。したがって、固有値 λ が全て純虚数になるような無限次行列 R を見つけることがリーマン予想の証明になるのである。 $\zeta(s)$ の行列式表示にはそのような大きな可能性が秘められているのだ。



リーマン予想の視覚的解釈

これまでに、 $\zeta(s)$ を除いた比較的簡単なゼータ関数について行列式表示が行われてきている。その結果、現在までに行列式表示できたゼータ関数について、リーマン予想に類似した関係が成り立つことが判明した。黒川教授はこれまでの研究を

もとにそれをさらに拡張して、全てのゼータ関数にも成り立つのではないかと期待している。だが、これを証明するにはさらに複雑なゼータ関数について行列式表示を行う必要があり、その道は非常に険しいものである。

多重三角関数で表す

黒川教授がゼータの行列式表示の研究中に発見したことがある。それは、sが奇数の時には分からなかった$\zeta(s)$の値を求める方法である。

sが偶数の場合は、

$$\begin{aligned}\sin \pi x &= \pi x \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right) \\ &= \pi x\left(1-\zeta(2)x^2+\frac{1}{2}\left(\zeta(2)^2-\zeta(4)\right)x^4-\cdots\right)\end{aligned}$$

と変形できることを利用する。そして、最左辺をテーラー展開し最右辺と係数比較をすることで$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$、$\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$などと求めることができる。だが、$s$が奇数ではこのような方法がとれないので、今までは正確な値が分からなかった。だが、もともとゼータ関数は$\zeta(s)$のsが偶数の時の求め方を見ても分かるように、三角関数と密接な関係がある。そこで黒川教授は、三角関数を利用して奇数の時にも$\zeta(s)$を表示できるのではないかと考え、多重三角関数を利用した表示にたどり着いた。

多重三角関数を用いた$\zeta(s)$の表示は、sが5のときは五重三角関数、sが7のときは七重三角関数というように、sの値に応じた多重三角関数を用いて表示できる。

例えば$\zeta(3)$なら、三重三角関数

$$S_3(x)=e^{\frac{x^2}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^{n^2}e^{x^2}\right)$$

を用いた表示で、

$$\zeta(3)=\frac{8}{7}\pi^2\log\left(S_3\left(\tfrac{1}{2}\right)^{-1}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\right)$$

という形になる。$\zeta(s)$の多重三角関数を利用した表示の一般形も存在するが、とても複雑な形になるのでここでは割愛する。

こうして$\zeta(s)$の多重三角関数による表示を発見した結果、sが奇数の場合の$\zeta(s)$の値が表示できるようになった。このことは既に判明していたsが偶数の場合も合わせて、sが自然数の場合の$\zeta(s)$の値は全て表せるようになったことを意味している。これはゼータの研究の中でも大きな功績と言えるに違いない。

ゼータのこれから

「なぜゼータを研究するのか ——」この問いに対する黒川教授の答えは興味深いものだった。物質の最小構成単位が素粒子であるのと同じように、素数こそが数の根源であるという。素粒子の研究者が物質の根底を追求していくのと同様、素数の研究を深めることで、数全体を究めることにもつながるのである。

難問の証明にゼータが期待されるのも、ゼータが数の根源を扱うからだと言える。黒川教授によると、ゼータは元来代数学で扱う分野であるが非常に多様性があり、幾何学や解析学でも研究され、たいへん注目を浴びているという。

また、黒川教授の目標であり、現在数学界の目標の一つでもあるリーマン予想の証明については、前のページでも紹介した通り行列式表示というアプローチで解決を試みている。この方法を研究することにより、リーマン予想が全てのゼータ関数にも適用できる可能性や、多重三角関数による表示など得られた成果は大きい。しかし、リーマン予想は現在のところ解決への道筋がはっきりと定まっておらず、行列式表示もその道筋の一つでしかない。黒川教授は、おそらく現在の数学界の研究レベルはリーマン予想の解決までのおよそ20%に相当し、完全に証明されるまでには2050年ぐらいまでかかるだろうと考えている。「若い人は、これまでのゼータ関連の問題の解決例から道筋を自分で定めてリーマン予想解決を目指して挑戦して欲しい」と、証明へ向けての期待も寄せていた。

Column ――リーマンゼータ関数

本文の最初で、$\zeta(s)$という黒川教授の研究の中心となるゼータ関数を紹介した。しかし、4ページの s が偶数の場合の $\zeta(s)$ の値の求め方で奇妙に思われたかも知れない。何故なら、

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{n^2})$$

を展開しても本文で紹介した $\zeta(s)$ が出てこないからだ。

実は $\zeta(s)$ を変形すると

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots \quad (s>1)$$

になり、専門書などではこの形で用いられることが多い。しかし、この形では素数が表れないのでゼータ関数としてわかりやすい、本文では、

$$\begin{aligned}\zeta(s)&=\prod_{p:\text{素数}}(1-p^{-s})^{-1} \qquad (s>1)\\&=(1-2^{-s})^{-1}\cdot(1-3^{-s})^{-1}\cdot(1-5^{-s})^{-1}\cdots\end{aligned}$$

を $\zeta(s)$として用いた。

ここで、これら二つの $\zeta(s)$ の式が互いに等しいことを見てみよう。

$|x|<1$のとき、テーラー展開より

$$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\cdots$$

が成り立つから、x に素数の$(-s)$乗を代入し、各式を掛けると

$$\begin{array}{rl}(1-2^{-s})^{-1}&=1+2^{-s}+4^{-s}+\cdots\\(1-3^{-s})^{-1}&=1+3^{-s}+9^{-s}+\cdots\\(1-5^{-s})^{-1}&=1+5^{-s}+25^{-s}+\cdots\\\times)\quad\vdots&\\\hline\prod_{p:\text{素数}}(1-p^{-s})^{-1}&=1+2^{-s}+3^{-s}+\cdots\end{array}$$

となる。この式の右辺の1は、それぞれの項ですべて1を選び、2^{-s}は一番上の項では2^{-s}を、それより下の項では全て1を選ぶ。このように右辺の各項を全て組み合わせていくと、出てきた式の右辺は自然数の$(-s)$乗が並び、最初に挙げた形の右辺に一致する。

それでは、

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{n^2})$$

を実際に展開して、本文で挙げた形になることを確かめてみよう。

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{n^2})=(1-x^2)(1-\frac{x^2}{2^2})(1-\frac{x^2}{3^2})\cdots$$

であるから、x^2の項は

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=-(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots)=-\zeta(2)$$

x^4の項は

$$\begin{aligned}&\sum_{n<m}\frac{1}{n^2m^2}\\&=\frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)^2-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)^2\right)\\&=\frac{1}{2}(\zeta(2)^2-\zeta(4))\end{aligned}$$

となり、本文の式と一致することが分かる。

ここで話は戻るが、$\zeta(s)$はオイラーが1737年に発見した、ゼータの歴史上最初のゼータ関数である。このことがゼータ関数の元祖と言われる所以である。ゼータは、このあと素数定理を経てリーマン予想へと進化する。その研究をリードしたのは有名な数学者リーマンである。リーマンは $\zeta(s)$ の基本的な性質を証明し、リーマン予想を提出したのである。したがって、$\zeta(s)$はリーマンゼータ関数と呼ばれている。

ゼータの存在、そしてそのゼータがフェルマーの最終定理の解決の鍵になっていたことは、黒川教授の取材に行くまで全く知らなかった。フェルマーの最終定理が完全に解決されたのは1994年であるから、ゼータの始まりから257年にしてゼータは難題を解決するという数学上で非常に大きな役割を果たした。

しかし、ゼータ関数の元祖であるリーマンゼータ関数の性質を問うリーマン予想が未解決のままであるなど、ゼータの研究はまだ道半ばであり、ゼータの世界はまだまだ広がっていくはずだ。

最後に、お忙しい中度重なる取材に快く応じて下さった黒川教授に心からお礼を申し上げます。先生のご研究が、今後ますます発展されることを願っております。

（熊谷　俊昭）